Απειροστικός Λογισμός Ι [111]

Βιβλίο: Σωτήρης Ντούγιας
christos.saroglou@gmail.com | 503-γ

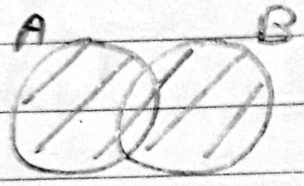
1-10-18

Σύνολα A, B
$A=B$ όταν τα A κ' B έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία
- A υποσύνολο του B $[A \subseteq B]$: $\forall\, x \in A,\ x \in B$

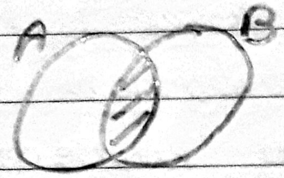
- Αν $A \subseteq B$ κ' $B \subseteq A \Rightarrow A=B$

<u>Πράξεις Συνόλων</u>

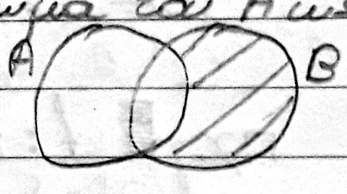
• Ένωση των A κ' B
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$



• Τομή των A κ' B
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ κ' } x \in B\}$



• Διαφορά του A από το B (συμπλήρωμα του A ως προς B)
$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ κ' } x \notin A\}$



* $(B-A) = \{\beta - \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ κ' } \alpha \in \mathbb{R}\}$
↳ Με την προϋπόθεση → $B \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathbb{R}$

<u>Καρτεσιανό Γινόμενο των A κ' B</u>
$(\alpha,\beta) \neq (\beta,\alpha)$ → Διατεταγμένα ζεύγη
$\{\alpha,\beta\} = \{\beta,\alpha\}$ → Σύνολα
$A \times B = \{(\alpha,\beta),\ \alpha \in A,\ \beta \in B\}$ → Σύνολο ζευγών
πχ. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,4\}$
$A \times B = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

Φυσικοί : $\mathbb{N}=\{1,2,3\dots\}$

Ακέραιοι : $\mathbb{Z}=\{\dots -3,-2,-1,0,1,2,3\dots\}=\mathbb{N}\cup\{-x : x\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$

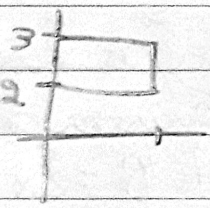
Ρητοί : $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$

Πραγματικοί : $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^{+}=\{x\in\mathbb{R} : x>0\}$
- $\mathbb{R}^{-}=\{x\in\mathbb{R} : x<0\}$
- $\mathbb{R}^{*}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $\emptyset$: κενό σύνολο (σύνολο χωρίς στοιχεία)

$[0,1]$, $[2,3]$: $[0,1]\times[2,3]$ = $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ = Επίπεδο

$\{(\alpha,\beta) : \alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}\}$



$f : A \to B$ (σύνολο τιμών)

$y=f(x)$

(x,y)

$x\to y$

Συνάρτηση $f:A\to B$ είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου με τις εξής ιδιότητες :

(i) $\forall\ \alpha\in A,\ \exists \beta\in B$ τέτοιο ώστε $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$

(ii) Αν $(\alpha,\beta_1),(\alpha,\beta_2)\in f \Rightarrow \beta_1=\beta_2$

π.χ. $f:\{1,2,3\}\to\{4,5\}$ με $f(1)=4$, $f(2)=4$, $f(3)=5$

$f=\{(1,4),(2,4),(3,5)\}$

$\boxed{\text{Γράφουμε } f(\alpha)=\beta \text{ όταν } (\alpha,\beta)\in f}$

$f:A\to B \Rightarrow$ 1-1 (αμφιμονοσήμαντη) αν $\forall\ x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f(x_1)\neq f(x_2)$

ή ισοδύναμα $\Rightarrow \forall\ x_1,x_2\in A$, αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$

π.χ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ — όχι 1-1 γιατί $f(-1)=f(1)$

$*\begin{cases}\cdot \text{ Πεδίο τιμών} = [0,+\infty) \\ \cdot \text{ Σύνολο τιμών} = \mathbb{R}\end{cases}$

π.χ. $f(x)=x^3+1$ νδο 1-1

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(x_2)$ | νδο $x_1=x_2$

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$x_1^3+1=x_2^3+1$$
$$x_1^3=x_2^3$$
$$x_1=x_2 \quad \text{[Δύναμη 3 περιττός]}$$

Πεδίο τιμών της $f = R(f)=\{f(x): x\in A\}\subseteq B$

Όταν $R(f)=B$, τότε η f λέγεται <u>επί</u>

$\forall\, y\in B,\ y\in R(f)$

$\forall\, y\in B,\ \exists\, x\in A$ των $y=f(x)$

f 1-1 και επί λέγεται <u>αντιστρέψιμη</u>

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

*ΠΟ -> το μεγαλύτερο σύνολο των τιμών που πέρνει το x ώστε η f να ορίζεται

• $x^2-4x+3>0$

$\Delta=4$

$x_1=3,\ x_2=1$

$-\infty$		1		3		$+\infty$
	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

Άρα $ΠΟ=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

$R(f)=\{y: y=f(x)$ για κάποιο $x\in Π.Ο\}$

$y=\sqrt{x^2-4x+3}$ $\qquad -\ y\geq 0$

$y^2=x^2-4x+3$

$x^2-4x+3-y^2=0$

$\Delta=16-4(3-y^2)=4+y^2>0$

• Υπάρχει λύση αν $y\geq 0$

• $R(f)=[0,+\infty)$